

١-٤ التبرير الإستنتاجي
Deductive Reasoning

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

والآن:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning

قانون الفَصْل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليص قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.

قانون الفَصْل المنطقي: تُسمى الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني **التبرير الاستنتاجي** .

وكما ترى فإن التبرير الاستنتاجي يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبرير الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.





٤-١ التبرير الإستنتاجى
Deductive Reasoning

مثال 1 من واقع الحياة

التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:

a) في كل مرة يلعب ماجد كرة القدم وهو يرتدي حذاءه المفضل، يسجل هدفًا واحدًا على الأقل. ولقد ارتدى حذاءه المفضل، وذهب ليلعب في مباراة هذه الليلة، وقد استنتج أنه سيسجل هدفًا واحدًا على الأقل في هذه المباراة .

اعتمد ماجد على نمط من المشاهدات للتوصل إلى النتيجة، فهو بذلك استعمل التبرير الاستقرائي.

b) إذا تأخر مشاري عن دفع قسط سيارته، فإنه سيقوم بدفع غرامة تأخير مقدارها 150 ريالًا. تأخر مشاري عن دفع قسط هذا الشهر، فاستنتج أن عليه دفع غرامة مقدارها 150 ريالًا.

اعتمد مشاري على حقائق ينص عليها عقد البيع في الحصول على النتيجة؛ لذا فقد استعمل التبرير الاستنتاجي.





1A) يشتهر مطعم بتقديم أطعمة حارة المذاق، ويظهر بجانب هذه الأطعمة رمز خاص في قائمة الطعام. طلب علي صنفًا من القائمة موجود بجانبه هذا الرمز. فاستنتج أن الصنف الذي طلبه حار المذاق.

التبرير الاستقرائي

1B) دُعي خالدٌ إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضر خالد الحفل.

التبرير الاستنتاجي





١-٤ التبرير الإستنتاجى
Deductive Reasoning

يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتم التوصل إليه عن طريق التبرير الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صحيحة لإثبات صحة التخمين. فلإثبات صحة التخمين يجب استعمال التبرير الاستنتاجي، وأحد أشكاله **قانون الفَصْل المنطقي**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الفَصْل المنطقي

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة، والفرض p صحيحًا، فإن النتيجة q تكون صحيحة أيضًا.

مثال: المعطيات : إذا لم يكن في السيارة وقود ، فإنها لن تعمل .
لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صحيحة: لن تعمل سيارة عبدالله .

عندما تكون العبارات المعطاة صحيحة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتمًا تكون صحيحة.





مثال 2 استعمال قانون الفَصْل المنطقي

حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة في كل مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسّر تبريرك.

a) **المعطيات:** • إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكوّنان نصفي مستقيم متعاكسين.
• $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم.

النتيجة: $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان.

الخطوة 1: حدّد الفرض p والنتيجة q للعبارة الشرطية الصحيحة.

p: زاويتان متجاورتان على مستقيم.

q: ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفي مستقيم متعاكسين.

الخطوة 2: حلل النتيجة.

العبارة المعطاة $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم تحقق الفرض.
إذن p عبارة صحيحة. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة
$\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان، التي تمثل q نتيجة صحيحة.

إرشادات للدراسة

المعلومات المعطاة
من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعطيات في الكتاب صحيحة.





b) **المعطيات:** • عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية.
• ارتدى مالك ملابس رياضية.

النتيجة: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

الخطوة 1: p: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

q: ارتدى مالك ملابس رياضية.

الخطوة 2: العبارة المعطاة "ارتدى مالك ملابس رياضية" تحقق النتيجة q للعبارة الشرطية الصحيحة. لكن كون العبارة الشرطية صحيحة، ونتيجتها صحيحة أيضًا، لا يعني صحة الفرض، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية، ولا يذهب إلى النادي الرياضي؛ وبذلك تكون النتيجة خاطئة.





2A) **المعطيات:** • إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.
• النقاط A, B, C تقع في المستوى $\mathcal{G}$.
النتيجة: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2A) غير صحيحة؛ قد تقع النقاط A, B, C في المستوى $\mathcal{G}$ وتكون على استقامة واحدة.

2B) **المعطيات:** • إذا أحضر الطالب موافقة من ولي أمره، يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.
• أحضر سلمان موافقة من ولي أمره.
النتيجة: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

الرجوع

صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي.





مثال 3 الحكم على النتيجة باستعمال أشكال ڤن

طبيعة: حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.

المعطيات:
- إذا كان الحيوان غوريلا فليس له ذيل.
- في الحديقة حيوان من رتبة الرئيسيات ليس له ذيل.

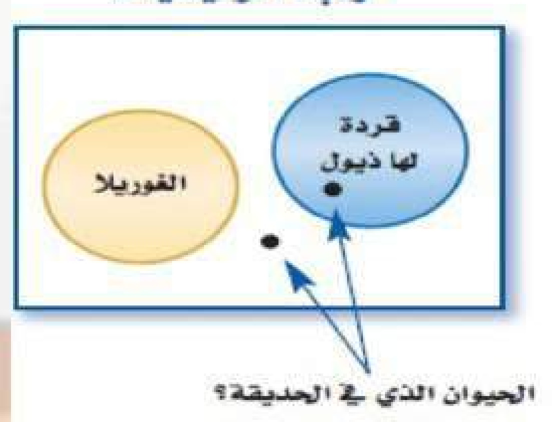
النتيجة: الحيوان الذي في الحديقة غوريلا.

افهم: ارسم شكل ڤن بناءً على المعطيات، لا يوجد للغوريلا ذيل، لذا ارسم دائرة تمثل الغوريلا لا تتقاطع مع دائرة القردة التي لها ذيول.



خطط: وبما أن الحيوان الذي في الحديقة ليس له ذيل؛ لذا فإنه لا ينتمي لمجموعة القردة التي لها ذيول.

حل: وهذا يضعه ضمن الدائرة التي تمثل الغوريلا أو خارجها، وعليه فالاستنتاج غير صحيح.



تحقق: نعرف من المعطيات أن الغوريلا وأنواع القرود الأخرى تقع ضمن رتبة الرئيسيات، لكن ليس للغوريلا ذيل، نعرف أن الحيوان الذي في الحديقة ليس له ذيل، ويمكن أن يكون قردًا لا ذيل له وليس غوريلا؛ لذا فالاستنتاج غير صحيح. ✔

الرجوع



3) **المعطيات:** • إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
• الشكل A مربع.

النتيجة: الشكل A مضلع.

3) صحيحة؛ يقع هذا الشكل في دائرة المربعات التي تقع داخل دائرة المضلعات، لذا تكون النتيجة صحيحة.







١-٤ التبرير الإستنتاجي
Deductive Reasoning

قانون القياس المنطقي: قانون القياس المنطقي هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، ويمكنك باستعمال هذا القانون الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صحيحتين، عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

إرشادات للدراسة

الدليل المنطقي يكون مدعومًا بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون القياس المنطقي

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q$, $q \to r$ صحيحتين، فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صحيحة أيضًا.

مثال: المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا،
إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

نتيجة صحيحة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

من المهم أن تتذكر أنه إذا لم تكن نتيجة العبارة الأولى فرض العبارة الثانية، فلا يمكنك استعمال قانون القياس





مثال 4 من الاختبار المعياري



أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D لا توجد نتيجة صحيحة.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حُل فقرة الاختبار

حلّل منطقيًا العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \longrightarrow q$ العبارة (2): $r \longrightarrow q$

يمكن اعتبار كل من العبارتين الشرطيتين صحيحة. ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضًا للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يحتمل أن تكون العبارات A, B, C صحيحة إلا أن المنطق الذي استعمل فيها غير صحيح؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصحيحة.









4) أي العبارات الآتية تنتج منطقيًّا من العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فسوف تكون مرهقًا

(2) إذا كنت مرهقًا، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

F إذا كنت مرهقًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

G إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

H إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيدًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

J لا توجد نتيجة صحيحة.

G



مثال 5 تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة"، وفسِّر تبريرك.

المعطيات:
- إذا كان عمرك 18 عامًا، يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.
- عُمر سلمان 18 عامًا.

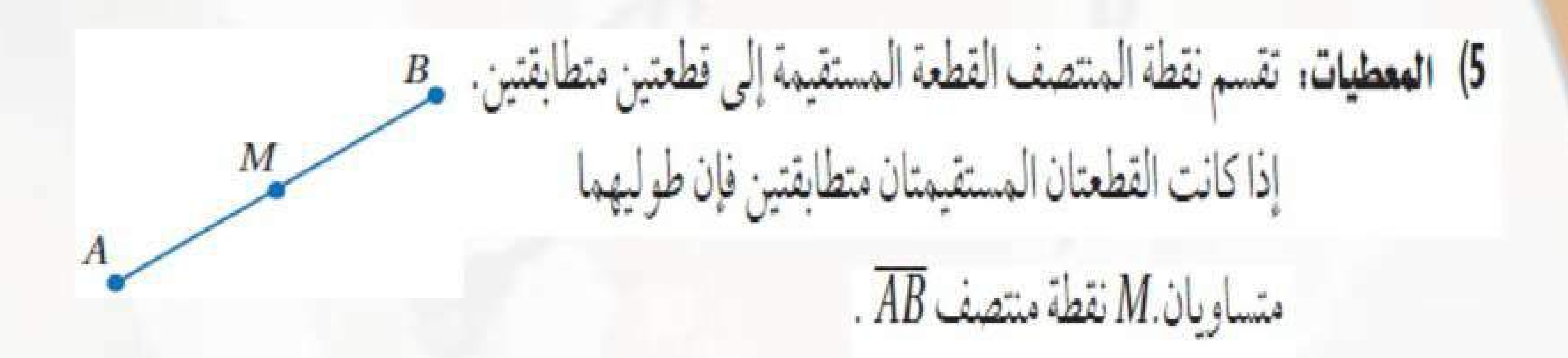
p: عمرك 18 عامًا.

q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

بما أن عمر سلمان 18 عامًا، فذلك يحقق الفرض p . وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صحيحة.







$AM = MB$؛ قانون القياس المنطقي





١-٤ التبرير الإستنتاجى
Deductive Reasoning

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95% . محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95%. التبرير الاستنتاجي

2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم. التبرير الاستقرائي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

3) المعطيات: • إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2 .

• العدد 12 يقبل القسمة على 4.

الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2.

الاستنتاج العدد 12 يقبل القسمة على 2

صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي



4) **المعطيات:** • إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا، فسوف يكون مرهقًا في اليوم التالي.

• فيصل مرهق.

الاستنتاج: ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا.

الاستنتاج ذهب فيصل إلى النوم متأخراً

غير صحيحة؛ قد يكون فيصل مرهقاً بسبب تمرين رياضي شاق.

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات.

فسر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.




5) **المعطيات:** • إذا كان الشاطئ عامًا، فإنه لا يوجد فيه منقذون.

• الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.

الاستنتاج: الشاطئ الجنوبي عام.

غير صحيحة؛ يمكن أن يكون الشاطئ الجنوبي داخل الدائرة التي تمثل الشاطئ العام أو خارجها.



الرجوع



6) **المعطيات:** • إذا اجتاز الطلاب اختبار القبول، فسوف يُقبَلون في الكلية.

• اجتاز عبدالله اختبار القبول.

الاستنتاج: سيُقبَل عبدالله في الكلية.



صحيحة، يقع عبد الله ضمن مجموعة الطلاب الذين اجتازوا اختبارات القبول، وتقع هذه الدائرة داخل الدائرة التي تمثل الطلاب الذين قبلوا في الكلية لذا فسوف يقبل عبد الله في الكلية.

7) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًا عن العبارتين (1)، (2)؟

(1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه $90°$

(2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإن زاويتيه الحادتين تكونان متتامتين.

A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها $90°$.

B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإن زاويتيه الحادتين لا تكونان متتامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحادتين متتامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية.

C) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحادتين متتامتان.



استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسِّر تبريرك.

8) **المعطيات:** • إذا أنهى وليد عمله، فإنه سيحصل على أجر.

• إذا حصل وليد على أجر، فإنه سيشتري مذياعًا.

إنهاء العمل — الحصول على أجر — شراء مذياع

إذا أنهى كمال عمله، فسوف يشتري مذياعاً، قانون القياس المنطقي.

9) **المعطيات:** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

$\angle 1 \cong \angle 2$

لا نتيجة، ليس شرطاً أن تكون $\angle 1$ و$\angle 2$ متقابلتين بالرأس كي تكونا متطابقتين.

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:

10) تنصُّ التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت الطالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبيهًا. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبيهًا. التبرير الاستنتاجي

11) لاحظ طبيب الأسنان أن فهدًا يأتي في موعده المحدد، إذن سوف يأتي فهد في الموعد المحدد للزيارة القادمة. التبرير الاستقرائي



12) إذا قرّر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولذلك لم يحضر سعد تدريب كرة القدم.

التبرير الاستنتاجي

13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، ولذلك افترضت أن درجاتها سوف تتحسن.

التبرير الاستقرائي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

14) **المعطيات:** الزوايا القائمة متطابقة، $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

الاستنتاج: $\angle 1 \cong \angle 2$.

صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي

15) **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا فإن له أربع زوايا قائمة.

الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة .

الاستنتاج: الشكل $ABCD$ مربع.

غير صحيحة؛ قد يكون الشكل مستطيلاً.

16) **المعطيات:** منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين.

$\overrightarrow{KM}$ منصف لـ $\angle JKL$.

الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$.

صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي



17) **المعطيات:** إذا بِيعَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسيُقام في قاعة المدينة.
بِيعَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء.

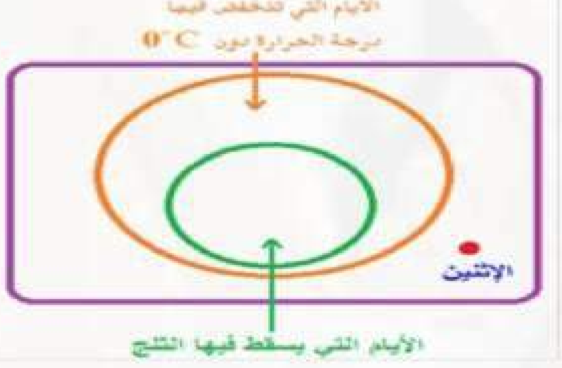
الاستنتاج: سيُقام الحفل في قاعة المدينة. صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات.
فسر تبريرك باستعمال أشكال فن.

18) **المعطيات:** إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج.
لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

الاستنتاج: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

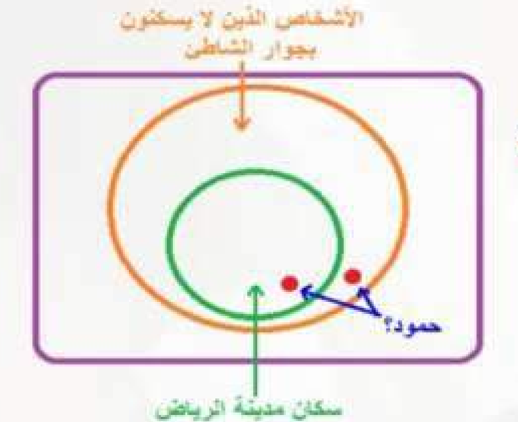
صحيحة، يقع يوم الاثنين خارج الأيام التي تنخفض فيها درجة الحرارة عن الصفر السيليزية، إذا لا يمكن أن يقع ضمن الأيام التي يسقط فيها الثلج، إذا فا النتيجة صحيحة.





19) **المعطيات:** إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

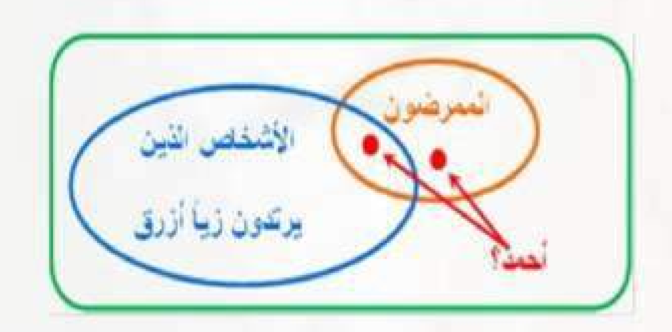
الاستنتاج: يسكن حمود في مدينة الرياض.



غير صحيحة، يمكن أن يكون حمود ضمن الدائرة التي تمثل مدينة الرياض، أو ضمن الدائرة التي تمثل الأشخاص الذين لا يسكنون قرب الشاطئ وخارج الدائرة التي تمثل سكان مدينة الرياض.

20) **المعطيات:** يرتدي بعض الممرضين زيًّا موحَّدًا أزرق اللون. يعمل أحمد ممرضًا .

الاستنتاج: يرتدي أحمد الزي الموحَّد الأزرق اللون.



غير صحيحة، يمكن أن يقع احمد ضمن دائرة الممرضين أو ضمن منطقة تقاطع الدائرتين، إذاً النتيجة غير صحيحة.



21) **الألعاب الأولمبية:** حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازًا سعوديًا كبيرًا في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400m حواجز، حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حلّ العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صائبة.

إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذّر ذلك، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسّر تبريرك.

22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف هذا العام.

إذا كُتب اسم شيماء في لوحة الشرف هذا العام فإنه سيتم تكريمها.

إجابة ممكنة، إذا حصلت شيماء على معدل٩٨% أو أكثر فإنه سيتم تكريمها.

23) إذا تعامد مستقيمان في مستوى، فإنهما سيتقاطعان ويكوّنان زوايا قائمة.

المستقيمان r و s في نفس المستوى ويكوّنان زوايا قائمة. لا نتيجة صحيحة





24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان.

إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسر تبريرك.

25) **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$

$\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان.

مجموع قياسي $\angle 1$ و$\angle 2$ يساوي $90°$؛ قانون الفصل المنطقي.

26) **المعطيات:** المثقفون يحبون المطالعة.

إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة.

إذا كنت مثقفاً فأنت من زوار المكتبة العامة؛ قانون القياس المنطقي.

27) **المعطيات:** إذا كنت رياضيًا، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

لا نتيجة صحيحة



28) **اكتب:** فسِّر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:

إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفءٍ في يديك.

إذا لم تكن يداك دافئتين، فإن قفازاتك رقيقة.

لا يمكننا استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن الفرض في العبارة الشرطية الثانية هو نفي نتيجة العبارة الشرطية الأولى. وإذا ما أردنا أن نطبق قانون القياس المنطقي، يجب أن تكون نتيجة العبارة الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

29) **تحدٍّ:** استعمل الرمزين $\rightarrow$، $\wedge$؛ لتمثيل كلٍّ من قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز.

قانون الفصل المنطقي

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$$

قانون القياس المنطقي

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\right] \rightarrow (p \rightarrow r)$$



30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة منهما، موضحًا تلك النتيجة.

(١) إذا حصل طالب الثانوية العامة على معدل 95% فما فوق، فإنه يكون متميزاً
(٢) إذا كان الطالب متميزاً في الثانوية العامة، فإنه سيبعث للدراسة في الخارج.
النتيجة: إذا حصل طالب الثانوية العامة على 95% فما فوق، فإنه سيبعث للدراسة في الخارج.

31) **تحدٍّ:** افترض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تُحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صائبة أم خاطئة؟ علّل إجابتك.

إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحقق الخاصية B.

صحيحة، إجابة ممكنة: إذا حقق المثلث الخاصية B فإنه يحقق نظرية فيثاغورث، وإذا حقق نظرية فيثاغورث فإنه قائم الزاوية.
وبا ستعمال قانون القياس المنطقي نستنتج العبارة الشرطية الآتية:
إذا حقق المثلث الخاصية B يكون قائم الزاوية، والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة هي الجملة المعطاة في السؤال. وله نفس قيمة صواب العبارة الأصلية وهي صحيحة.

32) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة.

وجه الشبه بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة أن كليهما يوظفان مفهوم أن كلاً من القيمتين المتكافئتين لنفس القيمة تكونان متكافئتين. والاختلاف بينهما أن قانون القياس المنطقي يستعمل للحصول على نتيجة من عبارتين شرطيتين، في حين تستعمل خاصية التعدي للمساواة لتحديد علاقة عددية بين قيمتين.

الرجوع



١-٥ المسلمات و البراهين الحرة
Postulates and paragraph proofs

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستنتاجي بتطبيق قانون الفَصل المنطقي وقانون القياس المنطقي.

والآن:

- أتعرف المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب برهانًا حرًا.

المفردات:

المسلّمة
axiom or postulate

البرهان
proof

النظرية
theorem

البرهان الحر
paragraph proof

مسلمات

أضف إلى مطويتك

النقاط والمستقيمات والمستويات

	التعبير اللفظي	مثال	
1.1	أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.	(شكل: مستقيم n يمر بالنقطتين P و R)	المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R.
1.2	أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.	(شكل: المستوى $\mathcal{K}$ والنقاط A و B و C)	المستوى $\mathcal{K}$ هو المستوى الوحيد الذي يحتوي النقاط A و B و C والتي لا تقع على استقامة واحدة.
1.3	كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.	(شكل: مستقيم n والنقاط P و Q و R)	المستقيم n يحتوي النقاط P و Q و R.
1.4	كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.	(شكل: المستوى $\mathcal{K}$ والنقاط L و B و E و C)	يحتوي المستوى $\mathcal{K}$ النقاط L و B و C و E، وهي ليست على استقامة واحدة.
1.5	إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.	(شكل: المستوى $\mathcal{K}$ والمستقيم m المار بـ A و B)	تقع النقطتان A و B في المستوى $\mathcal{K}$، ويمر بهما المستقيم m ؛ إذن المستقيم m يقع كليًا في المستوى $\mathcal{K}$.





الفصل الأول ١-٥ المسلمات و البراهين الحرة
Postulates and paragraph proofs

النقاط والمستقيمات والمستويات: المسلَّمة أو البدهية هي عبارة تُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلّمات.

تتعلق المسلمات الاتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

مسلمتان
تقاطع المستقيمات والمستويات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	مثال	
1.6 إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.	(P, s, t)	المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P.
1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.	(w, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$)	يتقاطع المستويان $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ في المستقيم w.





تُعد المسلّمات أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد المسلّمات

هندسة معمارية: اشرح كيف توضح الصورة صحة كل من العبارات الآتية، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة.

a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G. ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m.

حافة البناية عبارة عن المستقيم m. والنقاط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m. وبتطبيق المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل، يتضح أن العبارة صحيحة.

b) يتقاطع المستقيمان s و t في النقطة D.

الشبكة المثلثة أعلى واجهة البناية تتشكل من مستقيمات متقاطعة، والمستقيمان s و t يتقاطعان في نقطة واحدة فقط هي D، وبتطبيق المسلّمة 1.6 التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، يتضح أن العبارة صحيحة.

إرشادات للدراسة

المفاهيم غير المعرفة
النقطة والمستقيم والمستوى هي مفاهيم غير معرفة. وتصف المسلّمات التي تعلمتها في هذا الدرس بعض العلاقات الخاصة بين هذه المفاهيم.





1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

1A) تشكل النقاط **A, B, C** الرؤوس الثلاثة للسقف. وحسب المسلّمة **1.2** فإن هناك مستوى واحد فقط يمر بها.

1B) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ في المستقيم m.

1B) يتقاطع وجها البناية في الحافة التي تمثل المستقيم **m**، فيتقاطع المستويان **$\mathcal{P}$** و **$\mathcal{Q}$** اللذان يحتويان وجهي البناية في المستقيم **m** حسب المسلمة **1.7**.









مثال 2 تحليل العبارات باستعمال المسلَمات

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.

a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

صحيحة دائمًا؛ تنص المسلّمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع بكامله في ذلك المستوى. بما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه، فإن أي نقطة واقعة عليهما بما فيها نقطة التقاطع تقع في المستوى نفسه.

b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحيانًا: تنص المسلّمة 1.3 على أن كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل، وهذا يعني أنه يمكن أن يحتوي المستقيم نقطتين أو أكثر؛ إذن يمكن أن تكون أربع نقاط ليست على استقامة واحدة مثل A, E, C, D في الشكل المجاور، أو تكون على استقامة واحدة مثل A, B, C, D .

إرشادات للدراسة

نظام المسلمات هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.





2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى.

2A) صحيحة دائماً؛ هناك دائماً ثلاث نقاط على الأقل لا تقع على استقامة واحدة تحدد مستقيمين متقاطعين.

2B) تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

2B) غير صحيحة أبدًا؛ لكي تتقاطع ثلاث مستقيمات في نقطتين يجب أن يكون اثنان منهما متوازيين.





البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة التي تريد إثبات صحتها بكتابة **برهان** . وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظرية**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خطوات كتابة البرهان

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برِّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المعطيات (الفرض)
↓
العبارات والمبررات
↓
المطلوب (النتيجة)

الرجوع



أحد أنواع البراهين هو **البرهان الحر**، وفيه تُكتب فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطى.

مثال 3 كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $XM \cong MY$.

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

X M Y

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، فإنه بحسب تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة تكون $\overline{XM}$ و $\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.







3) إذا علمت أن C تقع على $\overline{AB}$، حيث $\overline{CB} \cong \overline{AC}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

3) **المعطيات:** c تقع بين A و B ، $\overline{CB} \cong \overline{AC}$.

المطلوب: إثبات أن C نقطة منتصف $\overline{AB}$.

A C B

البرهان:

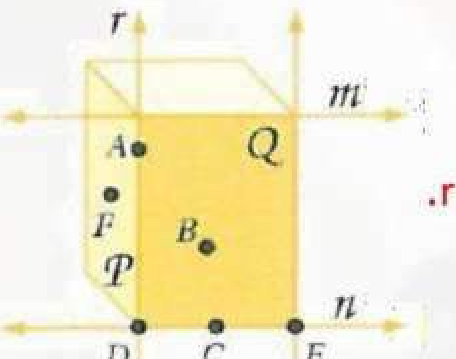
من المعطيات $\overline{CB} \cong \overline{AC}$ ، ومن تعريف القطع المستقيمة المتطابقة، فإن طول $\overline{AC}$ يساوي طول $\overline{CB}$، ومن تعريف نقطة المنتصف، فإن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.





الفصل الأول ١-٥ المسلمات و البراهين الحرة
Postulates and paragraph proofs





1) المستويان $\mathcal{P}$ و Q يتقاطعان في المستقيم r.

يشترك الوجهان الأمامي والأيسر في الحرف الذي يمثل المستقيم r. يتقاطع المستويان P و Q في المستقيم r فقط بحسب المسلمة 1.7.

2) المستقيمان r و n يتقاطعان في النقطة D.

أحرف الشكل تمثل مستقيمات متقاطعة. المستقيمان n,r يتقاطعان في موقع واحد هو النقطة D. المسلمة ١,٦ تنص على انه إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

3) المستقيم n يحوي النقاط C, D, E .

الحرف السفلي للشكل من الجهة الأمامية هو المستقيم n الذي يحتوي النقاط C,D,E . والمسلمة ١,٧ تنص على أن المستقيم يحوي على الأقل نقطتين.

4) المستوى $\mathcal{P}$ يحوي النقاط A, F, D .



الجانب الأيسر من الشكل أو المستوى P يحتوي النقاط . A,F,D والمسلمة١,٤ تنص على أن المستوى يحتوي على الأقل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

5) المستقيم n يقع في المستوى Q.

النقطتان E,D واقعتان على المستقيم n، وكذلك في المستوى Qوالمسلمة ١,٥ تنص على انه إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الذي يحويهما يقع بكامله في هذا المستوى.

6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D.

المستقيم r يحتوي النقطتين A,D المسلمة 1.1 تنص على انه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين.

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر تبريرك.

7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.

صحيحة احياناً؛ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات فيمكن أن يكون تقاطعهما نقطة أو مستقيم.

8) المستقيم r يحوي النقطة P فقط.

غير صحيحة أبداً، بسبب المسلمة 1.3 المستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.

9) يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.

صحيحة دائماً؛ بحسب المسلمة 1.1 يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.



في الشكل المجاور: يقع $\overleftrightarrow{AK}$ في المستوى $\mathcal{P}$ وتقع النقطة M على $\overleftrightarrow{NE}$.

اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كلٍّ من العبارات الآتية:

10) M, K, N تقع في مستوى واحد.

المسلمة 1.2؛ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

11) $\overleftrightarrow{NE}$ يحوي النقطتين N ، M.

المسلمة 1.3 المستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.

12) النقاط N, K, A تقع في المستوى نفسه.

المسلمة ١,٤؛ يحتوي المستوى ٣ نقاط على الأقل.

13) **برهان:** في الشكل المجاور $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ ، والنقطة C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$ اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $AC = CB$.





بما أن C نقطة منتصف كلٍ من

$\overline{AE}$ ، $\overline{DB}$ فإن $AC = CE = \frac{1}{2}AE$ ، وأيضًا $DC = CB = \frac{1}{2}DB$

وذلك بتعريف نقطة المنتصف.

من المعطيات $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ ، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة

$AE = DB$، ومن خاصية الضرب للمساواة $\frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}AE$

وبالتعويض ينتج أن $AC = CB$.





كعك: اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

14) المستقيمان n و ℓ يتقاطعان في النقطة K.

تشكل الحواف العلوية للطبقة السفلية مستقيمات متقاطعة.
يتقاطع المستقيمان nوا في نقطة واحدة هي k.
المسلمة 1.6.



15) المستويان Q , $\mathcal{P}$ يتقاطعان في المستقيم m.

يشترك الوجهان الأماميان في الحرف الذي يمثل المستقيم m، ويتقاطع المستويات P,Q في المستقيم m فقط بحسب المسلمة 1.7.



16) النقاط D, K, H تحدِّد مستوى.

الوجه الأمامي الأيسر من الطبقة السفلية من الكعكة يحتوي النقاط H,K,D ويكون مستوى. وبحسب المسلمة 1.2؛ يمر مستوى واحد فقط في ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

17) النقطة D تقع على المستقيم n المار بالنقطتين C , K.

الحرف العلوي للطبقة السفلية هو المستقيم n. تقع النقاط C,D,K على هذا الحرف؛ لذا فإنها تقع على المستقيم n. تنص المسلمة 1.3 على أن المستقيم يحوي على الأقل نقطتين.

18) النقاط E, F, G تقع في المستوى نفسه.

الوجه الأمامي الأيمن من الطبقة السفلية للكعكة يحتوي النقاط G,K,E,F، والتي تمثل مستوى. تنص المسلمة 1.2 على أنه يوجد مستوى واحد يمر في أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

19) $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى Q.

الوجه الأمامي الأيمن يحتوي النقطتين E,F، وأي مستقيم يمر بهما يقع في المستوى الذي يمثله هذا الوجه؛ وذلك بحسب المسلمة 1.5.

20) المستقيمان h , g يتقاطعان في النقطة J .

أحرف الطبقة السفلية تشكل مستقيمين متقاطعين. يتقاطع المستقيمان g,h في النقطة J. وبحسب المسلمة 1.6؛ إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.



حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك

21) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة دائماً. تنص المسلمة 1.2 على أن أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

22) ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بالنقطتين J و K.

غير صحيحة أبداً؛ تنص المسلمة 1.1 عل ان أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

23) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى X، فإنها تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحياناً؛ لا يشترط أن تكون النقاط على استقامة واحدة حتى تقع في المستوى نفسه.

24) تقع النقطتان X و Y في المستوى Z. وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضًا في المستوى Z.

صحيحة دائماً؛ تنص المسلمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن جميع نقاط المستقيم المار بهما تقع في هذا المستوى.

25) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

صحيحة أحيانا؛ يجب أن تكون النقاط ليست عل استقامة واحدة.



26) برهان: إذا علمت أن Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ، وأن Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

المعطيات: Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$

Z نقطة منتصف $\overline{YW}$

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$

البرهان: تعلم أن Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$ و Z نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، وبتعريف نقطة المنتصف $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$ و $\overline{YZ} \cong \overline{ZW}$ ، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة $XY = YZ$ و $YZ = ZW$ ، باستعمال خاصية التعدي للمساواة $XY = ZW$ ؛ إذن $XY \cong ZW$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

27) برهان: النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، ويتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ في النقطة K . إذا كان $\overline{MK} \cong \overline{JL}$ ، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.







المعطيات: L نقطة منتصف $\overline{JK}$

$\overline{JK}$ تتقاطع مع $\overline{MK}$ في K و $\overline{JL} \cong \overline{MK}$

المطلوب: $\overline{LK} \cong \overline{MK}$

البرهان: نعلم أن L نقطة منتصف $\overline{JK}$

وأن $\overline{JL} \cong \overline{MK}$. من نظرية نقطة المنتصف ينتج أن $\overline{LK} \cong \overline{JL}$

وباستعمال خاصية التعدي للتطابق $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.



28) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع A إلى الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90 km/h، وعلى الطريق (2) هو 110 km/h



a) أي الطريقين يبدو أقصر طولًا؟ فسّر تبريرك.

الطريق (1).

إجابة ممكنة: بما أنه يوجد مستقيم واحد يمر بأي نقطتين، وأن الطريق (1) يبدو مستقيماً يمر بالنقطتين A,B، فإنه أقصر الطريقين.





b) إذا كانت المسافة من A إلى B عبر الطريق (1) تساوي 16.8 km، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6 km، فأي الطريقين أسرع وصولاً، إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟ الطريق (2) هو الأسرع

في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ واقعان في المستوى $\mathcal{P}$، $\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DJ}$ واقعان في المستوى **Q**. اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي :

29) النقطتان C و B على استقامة واحدة.

المسلمة 1.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

30) $\overleftrightarrow{EG}$ يحوي النقاط E, F, G.

المسلمة 1.3؛ كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.

31) النقطتان D و F تقعان على استقامة واحدة.

المسلمة 1.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.



32) النقاط C, D, B تقع في المستوى نفسه.

المسلمة 1.2؛ أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

33) المستوى Q يحوي النقاط C, H, D, J .

المسلمة 1.4؛ كل مستوى يحتوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

34) المستوى $\mathcal{P}$ يتقاطع مع المستوى Q في $\overleftrightarrow{CD}$.

المسلمة 1.7؛ إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيماً.

35) **هندسة عمارة:** يُحسب ميل السطح عادة بقسمة الارتفاع مقِيسًا بالبوصة على المسافة الأفقية مقِيسة بالقدم. استعمل العبارات أدناه لتكتب برهانًا حرًّا للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ.

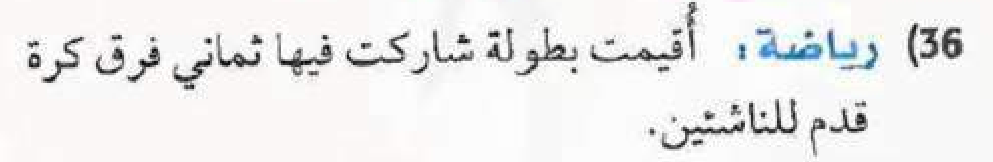
- عند استعمال مواد عازلة للماء، يجب أن يكون الميل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم على الأقل.
- حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.
- صمّم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلًا.
- الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.





➢ حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.

➢ الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.



إجابة ممكنة: صمم احمد سطح منزله بحيث يكون مائلاً ويجب أن يكون ميل السطح على الأقل ٤ بوصات لكل قدم، إلا أن ميل سطح منزل احمد هو ٢ بوصة لكل قدم وهي اقل من ٤ بوصات لكل قدم مما يعني أن الميل في التصميم غير كافي.



36) **رياضة:** أُقيمت بطولة شاركت فيها ثماني فرق كرة قدم للناشئين.

a) ما عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول؟

مباراة $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

b) ارسم شكلًا يوضح عدد مباريات الدور الأول. أيُّ مسلّمة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟ المسلّمة 1.1

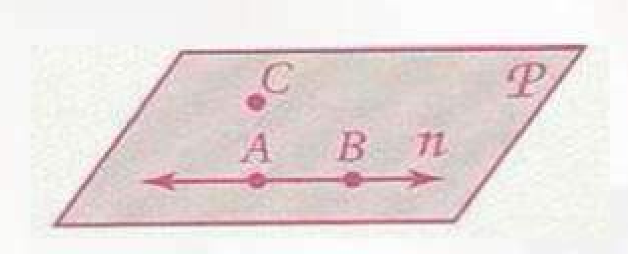
c) أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟



إذا كان هناك n فريق مشارك في البطولة، فإن عدد مباريات الدور الأول يساوي:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$

37) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا يحقق خمسًا من المسلمات السبع التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كلٌّ منها في الشكل.



هذا الشكل يحقق المسلّمتين١,١ و١,٣ لأن النقطتين A,B يمر بهما مستقيم واحد فقط. وأيضاً يحقق المسلّمتين ١,٢ و ١,٤لأن ثلاث نقاط تقع في مستوى واحد ، وكذلك يحقق المسلّمة ١,٥ لأنه توجد نقطتين A,B تقعان في المستوى، والمستقيم nالذي يمر بهما أيضاً يقع في المستوى P

38) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ ، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة منتصف $\overline{AD}$. وقد بدأ كلٌّ منهما برهانه بطريقة مختلفة. أيُّهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك.

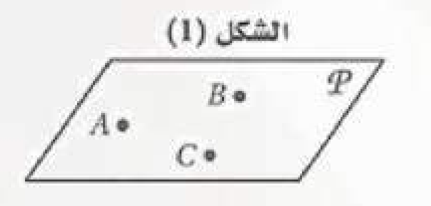
عمر
إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

سعيد
$\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

سعيد؛ يجب أن يبدأ البرهان بالمعطيات، و هي أن $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$ ، و النقاط A, B, D تقع على إستقامة واحدة.

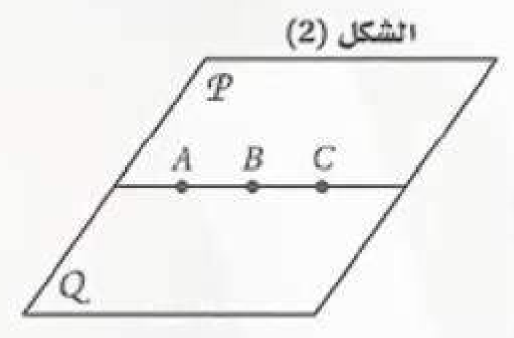


تبرير: حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك أو أعط مثالًا مضادًّا:



39) أيُّ ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

صحيحة أحياناً، إذا كانت النقاط لا تقع على استقامة واحدة فهناك مستوى واحد فقط يمر في هذه النقاط بحسب المسلمة 1.2 والشكل (1) يوضح ذلك.



أما إذا كانت النقاط تقع على استقامة واحدة، فإنه يوجد عدد لانهائي من المستويات التي تمر بها.يوضح شكل(2) مستويين يمران في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة، ويمكن رسم مستويات أخرى من الدوران حول هذه النقاط الثلاثة.

40) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين المسلّمات والنظريات.

المسلمات والنظريات، يمكن أن تستعمل جميعها في البراهين.
يمكن إثبات النظريات فقط، ويمكن أن تفسر المفاهيم غير المعرفة من خلال الأمثلة أو الوصف، في حين يمكن تفسير المفردات المعرفة من خلال استعمالنا للمفردات غير المعرفة أو مفردات معرفة أخرى، إما المسلمات فهي العبارات التي تقبل على أنها صحيحة دائماً.





١-٦ البرهان الجبري
Algebraic proof

فيما سبق:

درستُ استعمال المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات لكتابة برهان حر.

والآن:

- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:

البرهان الجبري
algebraic proof

البرهان ذو العمودين
two-column proof

www.obeikaneducation.com



لماذا؟



تحتوي بعض السيارات شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقياس الفهرنهايتي أو المقياس السيليزي. ويحدد المقياس الفهرنهايتي درجة تجمد الماء عند 32° ، ودرجة غليانه عند 212°، أما المقياس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند 0° ، وغليانه عند 100°.

يمكنك استعمال البرهان الجبري لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقياسين معطاة بالصيغة.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، فإنها تعطى أيضًا بالصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$.

البرهان الجبري: الجبر نظام مكون من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكنك من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخص عدة خصائص للأعداد الحقيقية التي ستدرسها في الجبر.

الرجوع



١-٦ البرهان الجبري
Algebraic proof

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص الأعداد الحقيقية

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن، $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي a
خاصية التوزيع	$a(b + c)= ab + ac$

البرهان الجبري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية. وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرًا من العبارات



مثال 1 تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

أثبت أنه إذا كان $-5(x+4)=70$، فإن $x=-18$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

$-5(x+4)=70$	المعادلة الأصلية، أو المعطيات
$-5 \cdot x + (-5) \cdot 4 = 70$	خاصية التوزيع
$-5x - 20 = 70$	بالتبسيط
$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$	خاصية الجمع للمساواة
$-5x = 90$	بالتبسيط
$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = -18$	بالتبسيط





اذكر الخاصية التي تبرر كلًا من العبارتين الآتيتين:

1A) إذا كان $4 + (-5) = -1$، فإن $x + 4 + (-5) = x - 1$

خاصية الجمع للمساواة

1B) إذا كانت $5 = y$ ، فإن $y = 5$

خاصية التماثل للمساواة

1C) أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$، فإن $x = 4$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

1C) $2x - 13 = -5$ (معطيات)

$2x - 13 + 13 = -5 + 13$

(خاصية الجمع للمساواة)

$2x = 8$ (بالتبسيط)

$x = 4$ (خاصية القسمة للمساواة)



يوضح المثال 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي مبرر كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذا العمودين**، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.

إرشادات للدراسة

الخوارزميات

الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتبعة لإجراء عملية أو حل مسألة ما. يمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات لأنه يتم خطوة بخطوة.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة البرهان الجبري

علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب أولًا المعطيات والمطلوب إثباته.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

إرشادات للدراسة

رياضيات ذهنية

إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنيًا؛ ففي المثال 2 يمكن حذف العبارتين 2 و 4 ليصبح مبرر العبارة 3 "خاصية الضرب للمساواة"، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".



المبررات	العبارات
1) معطيات	$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ (1
2) خاصية الضرب للمساواة	$\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$ (2
3) بالتبسيط	$\frac{9}{5}C = F - 32$ (3
4) خاصية الجمع للمساواة	$\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$ (4
5) بالتبسيط	$\frac{9}{5}C + 32 = F$ (5
6) خاصية التماثل للمساواة	$F = \frac{9}{5}C + 32$ (6







اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

2A) إذا كان $\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$، فإن $x = 3$.

2A) **المعطيات:** $\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$

المطلوب: $x = 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$	1) معطيات
2) $\frac{5x+1}{2} = 8$	2) خاصية الجمع للمساواة
3) $2\left(\frac{5x+1}{2}\right) = 2(8)$	3) خاصية الضرب للمساواة
4) $5x + 1 = 16$	4) بالتبسيط
5) $5x = 15$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $x = 3$	6) خاصية القسمة للمساواة







2B) فيزياء: إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهائية v في زمن t تعطى بالعلاقة $d = t \cdot \frac{u+v}{2}$ ، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$.

2B) **المعطيات:** $d = t\,\frac{u+v}{2}$

المطلوب: $u\,\frac{2d}{t} - v$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $d = t\,.\,\frac{u+v}{2}$	1) معطيات
2) $\frac{d}{t} = \frac{u+v}{2}$	2) خاصية القسمة للمساواة
3) $2\left(\frac{d}{t}\right) = 2\left(\frac{u+v}{2}\right)$	3) خاصية الضرب للمساواة
4) $\frac{2d}{t} = u + v$	4) بالتبسيط
5) $\frac{2d}{t} - v = u$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $u = \frac{2d}{t} - v$	6) خاصية التماثل للمساواة

الرجوع



١-٦ البرهان الجبري
Algebraic proof

البرهان الهندسي: بما أن في الهندسة أيضًا متغيرات، وأعدادًا وعمليات، فإن معظم خصائص المساواة المستعملة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. فأطوال القطع المستقيمة وقياس الزوايا هي أعداد حقيقية؛ لذا يمكن استعمال خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$، و $CD = EF$، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابة براهين هندسية .

إرشادات للدراسة

خاصيتا الإبدال والتجميع

الخصائص الآتية صحيحة لأي أعداد حقيقية a, b, c:

خاصية الإبدال للجمع
$a + b = b + a$

خاصية الإبدال للضرب
$a \cdot b = b \cdot a$

خاصية التجميع للجمع
$(a+b)+c=a+(b+c)$

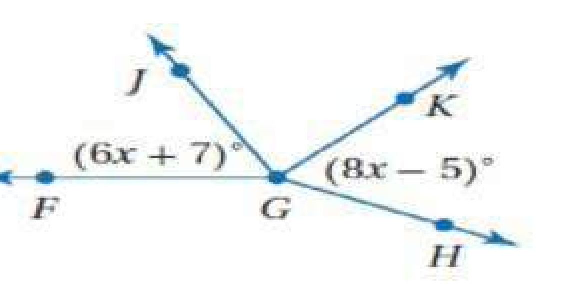
خاصية التجميع للضرب
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.





١-٦ البرهان الجبري
Algebraic proof

مثال 3 كتابة البرهان الهندسي



اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت
$\angle KGH \cong \angle JGK$ ، $\angle JGK \cong \angle FGJ$، فإن $x = 6$.

المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH,$
$m\angle FGJ = (6x + 7)°, m\angle KGH = (8x - 5)°$

المطلوب: $x = 6$

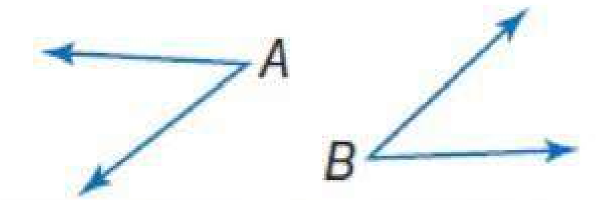
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle FGJ \cong \angle JGK; \angle JGK \cong \angle KGH$	1) معطيات
2) $m\angle FGJ = m\angle JGK; m\angle JGK = m\angle KGH$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle FGJ = m\angle KGH$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $6x + 7 = 8x - 5$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	5) خاصية الجمع للمساواة
6) $6x + 12 = 8x$	6) بالتبسيط
7) $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $12 = 2x$	8) بالتبسيط
9) $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	9) خاصية القسمة للمساواة
10) $6 = x$	10) بالتبسيط
11) $x = 6$	11) خاصية التماثل للمساواة

الرجوع

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كل من التخمينين الآتيين:

3A) إذا كان $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37°$،
فإن $m\angle B = 37°$.



3A) المعطيات: $\angle A \cong \angle B$
و $m\angle A = 37°$
المطلوب: $m\angle B = 37°$
البرهان:

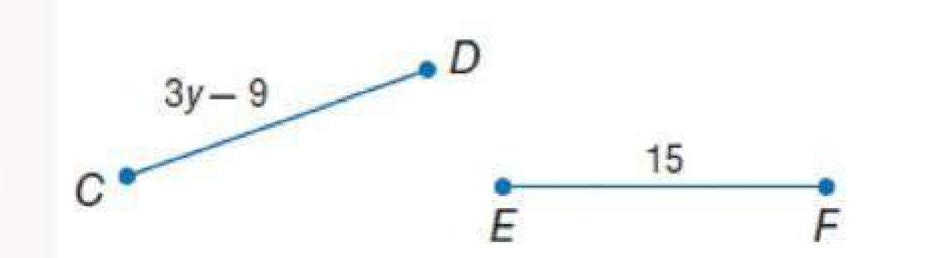
العبارات	المبررات
1) $\angle A \cong \angle B$ و $m\angle A = 37°$	معطيات
2) $m\angle A = m\angle B$	تعريف تطابق الزوايا
3) $37° = m\angle B$	خاصية التعويض للمساواة
4) $m\angle B = 37°$	خاصية التماثل













العبارات	المبررات
1) $\overline{CD} \cong \overline{EF}$	معطيات
2) $CD = EF$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $3y - 9 = 15$	خاصية التعويض للمساواة
4) $3y = 24$	خاصية الجمع للمساواة
5) $y = 8$	خاصية القسمة للمساواة







اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

1) إذا كان $x = 5$، فإن $5 = x$ خاصية التماثل للمساواة.

2) أثبت أنه إذا كان $2(x+5) = 11$، فإن $x = \frac{1}{2}$ اكتب تبريرًا لكل خطوة.

$2(x+5) = 11$ (معطيات) $2x = 11 - 10$ (خاصية الطرح)

$2x + 10 = 11$ (خاصية التوزيع) $x = \frac{1}{2}$ (خاصية القسمة)

3) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{y+2}{3} = 3$

المطلوب: $y = 7$





البرهان:

المبررات	العبارات
a) معطيات	a) ___؟ $\frac{y+2}{3}=3$
b) ___؟ خاصية الضرب بالمساواة	b) $3\left(\frac{y+2}{3}\right)=3(3)$
c) ___؟ التبسيط	c) ___؟ $Y+2=9$
d) خاصية الطرح للمساواة	d) $y=7$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

4) إذا كان $-4(x-3)+5x=24$، فإن $x=12$.

المعطيات: $24=-4(x-3)+5x$

المطلوب: $x=12$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $-4x+12+5x=24$ خاصية التوزيع

$24=x+12$ خاصية الجمع للمساواة

$24-12=x$ خاصية الطرح للمساواة

$x=12$ خاصية التبسيط



5) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $x = 7$.

A $4x - 6$ B C 22 D

المعطيات:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $x = 7$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطيات)

2) $AB = CD$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $4x - 6 = 22$ (بالتعويض)

4) $4x = 28$ (خاصية الجمع للمساواة)

5) $x = 7$ (خاصية القسمة للمساواة)

6) **صحة:** يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملًا جهاز قياس النبض؛ ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$، حيث T معدل نبضات القلب، و a عمر الشخص.

a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملًا الصيغة: $a = 220 - \frac{T}{0.75}$.



العبارات (المبررات)

1) $T = 0.75\,(220 - a)$ (معطيات)

2) $\frac{T}{0.75} = 220 - a$ (خاصية القسمة للمساواة)

3) $\frac{T}{0.75} - 220 - a$ (خاصية الطرح للمساواة)

4) $-\frac{T}{0.75} + 220 = a$ (خاصية الضرب للمساواة)

5) $a = -\frac{T}{0.75} + 220$ (خاصية التماثل للمساواة)

6) $a = 220 - \frac{T}{0.75}$ (خاصية الابدال للجمع)

b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكد صحة حساباتك؟

عمره 16 إجابة ممكنة: بالتعويض

$$a = 220 - \frac{153}{0.75}$$

$$a = 220 - 204$$

$$a = 16$$



حلول
منصة مدرسية تعليمية

اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

7) إذا كان $a + 10 = 20$، فإن $a = 10$. خاصية الطرح للمساواة

8) إذا كان $\frac{x}{3} = -15$، فإن $x = -45$. خاصية الضرب للمساواة

9) إذا كان $5(x + 7) = -3$، فإن $5x + 35 = -3$. خاصية التوزيع للمساواة

10) إذا كان $3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4$، فإن $3x - 2 = 4$. خاصية التوزيع للمساواة

11) أثبت أنه إذا كان $4(x - 5) = x + 2$، فإن $x = \frac{22}{3}$ مبررًا كل خطوة.

$4(x - 5) = x + 2$ (معطى)

$4x - 20 = x + 2$ (خاصية التوزيع)

$4x - x = 20 + 2$ (خاصية الجمع)

$3x = 22$ (خاصية الطرح)

$x = \frac{22}{3}$ خاصية القسمة

اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

12) إذا كان $m\angle 2 = m\angle 3$, $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$. خاصية التعدي

13) $XY = XY$ خاصية الإنعكاس



حلول
منصة مدرسية تعليمية

14) إذا كان $\frac{1}{5}DE = \frac{1}{5}BC$، فإن $BC = DE$. خاصية الضرب للمساواة

15) إذا كان $m\angle 2 = 25°$, $m\angle 1 = 25°$، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$. خاصية التعويض

16) إذا كان $BC = CD$, $AB = BC$، فإن $AB = CD$. خاصية التعدي للمساواة

أكمل البرهانين الآتيين:

17) المعطيات: $\frac{8-3x}{4} = 32$

المطلوب: $x = -40$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\frac{8-3x}{4} = 32$	a) معطيات
b) $4\left(\frac{8-3x}{4}\right) = 4(32)$	b) ؟ ____ b) خاصية الضرب للمساواة
c) $8 - 3x = 128$	c) ؟ ____ c) بالتبسيط
d) ؟ ____ d) $-3x = 120$	d) خاصية الطرح للمساواة
e) $x = -40$	e) ؟ ____ e) خاصية القسمة للمساواة



18) **علوم:** تعطى المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بالقدم بالصيغة: $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ ، حيث v سرعة الجسم بالقدم لكل ثانية، وt الزمن بالثانية، وa التسارع بالقدم لكل ثانية تربيع.

اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أن التسارع يمكن أن يُحسب بالصيغة $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$

(معطى) $d = vt + \frac{1}{2}at^2$

(خاصية الضرب للمساواة) $2d = 2vt + at^2$

(خاصية الطرح للمساواة) $at^2 = 2d - 2vt$

(خاصية القسمة للمساواة) $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

19) إذا كان $-\frac{1}{3}n = 12$ ، فإن $n = -36$.

العبارات (المبررات)

1) $-\frac{1}{3}n = 12$ (معطيات)

2) $-3(-\frac{1}{3}n) = -3(12)$ (خاصية الضرب للمساواة)

3) $n = -36$ (بالتبسيط)



حلول
منصة مدرسية تعليمية

20) إذا كان $-3r + \frac{1}{2} = 4$، فإن $r = -\frac{7}{6}$.

المعطيات: $-3r + \frac{1}{2} = 4$

المطلوب: $r = -\frac{7}{6}$

البرهان: العبارات(المبررات)

1) $-3r + \frac{1}{2} = 4$ (معطيات)

2) $2\left(-3r + \frac{1}{2}\right) = 2 \times 4$ (خاصية الضرب للمساواة)

3) $-6r + 1 = 8$ (بالتبسيط)

4) $-6r = 7$ (خاصية الطرح للمساواة)

5) $r = -\frac{7}{6}$ (خاصية القسمة للمساواة)

21) علوم: يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$، حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي(atm)، وV : الحجم باللترات، و n : عدد مولات الغاز، و R : ثابت الغاز المثالي، حيث $R = 0.0821$، T : درجة الحرارة بالكلفن.

a) أثبت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته باستعمال الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$.

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $PV = nRT$ (معطيات)



2) $\frac{PV}{nR} = \frac{nRT}{nR}$ (خاصية القسمة للمساواة)

3) $\frac{PV}{nR} = T$ (خاصية التعويض للمساواة)

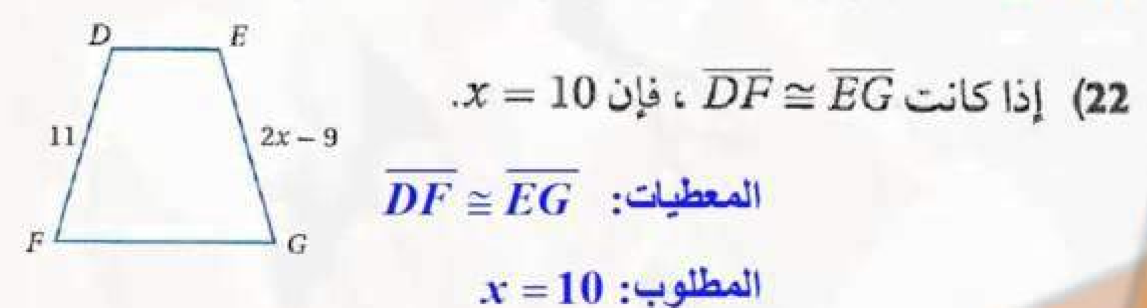
4) $T = \frac{PV}{nR}$ (خاصية التماثل للمساواة)

b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L ، وتحت ضغط مقداره 1 atm ؟ ما الخاصية التي تبرِّر حساباتك؟

305° كلفين، **خاصية التعويض للمساواة.**

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{1 \times 25}{1 \times 0.0821} = 305^\circ$$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينات الآتية:



22) إذا كانت $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ ، فإن $x = 10$.

المعطيات: $\overline{DF} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $x = 10$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ (معطيات)

2) $DF = EG$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $11 = 2x - 9$ (خاصية التعويض للمساواة)

4) $20 = 2x$ (خاصية الجمع للمساواة)

5) $10 = x$ (خاصية القسمة للمساواة)

6) $x = 10$ (خاصية التماثل للمساواة)

23) إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فإن $x = 4$.

A, B, C, $3x + 15$, $5x + 7$

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

المطلوب: $x = 4$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (معطيات)

2) $AB = AC$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $3x + 15 = 5x + 7$ (خاصية التعويض للمساواة)

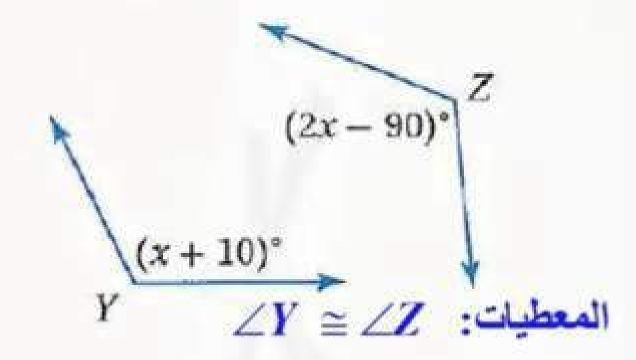
4) $8 = 2x$ (خاصية الطرح للمساواة)

5) $4 = x$ (خاصية القسمة للمساواة)

6) $x = 4$ (خاصية التماثل للمساواة)



24) إذا كانت $\angle Z \cong \angle Y$، فإن $x = 100$.



المعطيات: $\angle Y \cong \angle Z$

المطلوب : $x = 100$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\angle Y \cong \angle Z$ (معطيات)

2) $m\angle Y = m\angle Z$ (تعريف تطابق الزوايا)

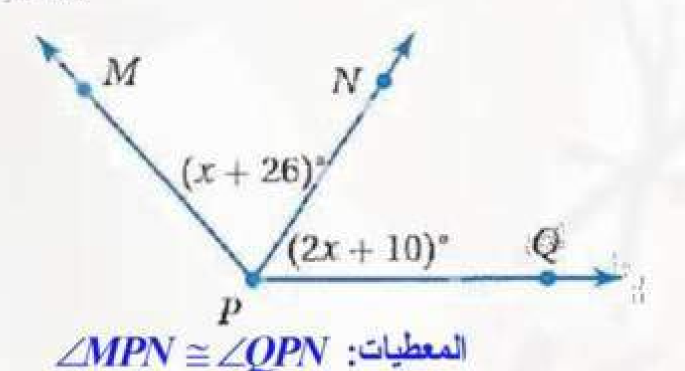
3) $x + 10 = 2x - 90$ (خاصية التعويض للمساواة)

4) $10 = x - 90$ (خاصية الطرح للمساواة)

5) $100 = x$ (خاصية الجمع للمساواة)

6) $x = 100$ (خاصية التماثل للمساواة)

25) إذا كانت $\angle QPN \cong \angle MPN$، فإن $x = 16$.



المعطيات: $\angle MPN \cong \angle QPN$

المطلوب: $x = 16$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\angle MPN \cong \angle QPN$ (المعطيات)

2) $m\angle MPN = m\angle QPN$ (تعريف تطابق الزوايا)

3) $x + 26 = 2x + 10$ (خاصية التعويض للمساواة)

4) $16 = x$ (خاصية الطرح للمساواة)

5) $x = 16$ (خاصية التماثل للمساواة)



26) كهرباء: يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$، حيث: P القدرة الكهربائية، و I شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة.

a) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما تتضاعف شدة التيار الكهربائي.

المعطيات: $V=\frac{P}{I}$

المطلوب: $\frac{V}{2}=\frac{P}{2I}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $V=\frac{P}{I}$ (معطيات)

2) $V=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{I}\cdot\frac{1}{2}$ (خاصية الضرب للمساواة)

3) $\frac{V}{2}=\frac{P}{2I}$ (بالتبسيط)

b) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما تتضاعف القدرة الكهربائية.

المعطيات: $V=\frac{P}{I}$

المطلوب: $2V=\frac{2P}{I}$





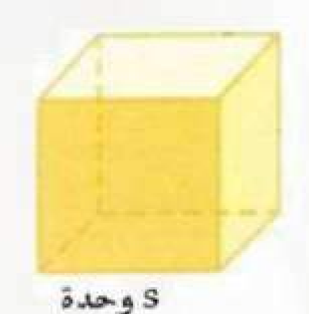
البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $V=\frac{P}{I}$ (معطيات)

2) $V=2\cdot\frac{P}{I}$ (خاصية الضرب للمساواة)

3) $2V=\frac{2P}{I}$ (بالتبسيط)

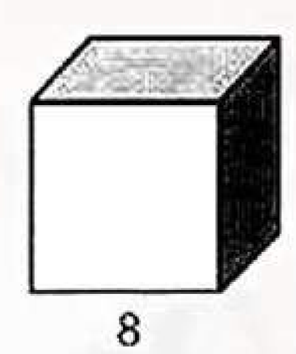


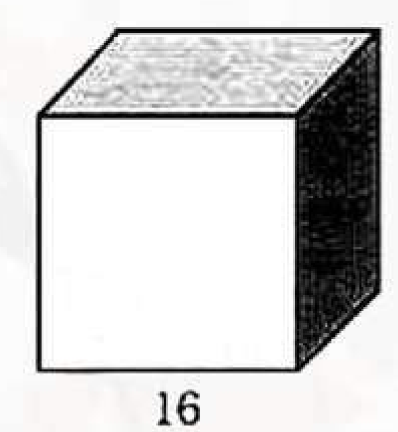
27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعبًا طول ضلعه s وحدة.

a) **حسيًا:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 16 ,8 ,4 ,2 وحدة.











b) **جدوليًا:** أوجد حجم كل مكعب.
نظّم نتائجك في جدول مثل المجاور.

طول الضلع (s)	الحجم (V)
2	8
4	64
8	512
16	4096

c) **لفظيًا:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغيُّر حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبّر عن تخمينك لفظيًا.

إجابة ممكنة: إذا تضاعف طول ضلع المكعب، فإن حجمة يصبح 8 أمثال الحجم الأصلي.

d) **جبريًا:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية. $8V = (2s)^3$

e) **منطقيًا:** اكتب برهانًا لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

المعطيات: مكعب طول ضلعه s وحدة مكعبة.

المطلوب: $8V = (2S)^3$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) طول ضلع المكعب S وحدة (معطيات)

2) حجم المكعب V وحدة مكعبة (معطيات)

3) $V = S^3$ (صيغة حجم المكعب)



V = s.s.s (4 (تعريف الأس)

V = 2.s.2.s.2.s2.2.2 (5 (خاصية الضرب للمساواة)

8V = (2s)(2s)(2s) (6

8V = (2s)3 (7 (تعريف الأس)

28) **تحدٍّ:** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. إذا علمت أن طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$، وطول $\overline{PB}$ يساوي $\frac{3x+1}{2}$ ، وطول $\overline{AB}$ يساوي 10.5 وحدات ، فارسم شكلًا يوضح المسألة، وأثبت أن طول $\overline{AP}$ يساوي ثلثَي طول $\overline{AB}$.

1) $AP = 2x + 3, PB = \frac{3x+1}{2}, AB = 10.5$ (معطيات)

2) $2x + 3 + \frac{3x+1}{2} = 10.5$ (خاصية التعويض للمساواة)

3) $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot 10.5$ (خاصية الضرب للمساواة)

4) $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 21$ (بالتبسيط)

5) $2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3x+1}{2} = 21$ (خاصية التوزيع)

6) $4x + 6 + 3x + 1 = 21$ (بالتبسيط)

10.5

A P B

2x + 3   (3x + 1)/2



7) $7x + 7 = 21$ (بالتبسيط)

8) $7x + 7 - 7 = 21 - 7$ (خاصية الطرح للمساواة)

9) $7x = 14$ (بالتبسيط)

10) $x = 2$ (خاصية القسمة للمساواة)

11) $AP = 2(2) + 3$ (خاصية التعويض للمساواة)

12) $AP = 4 + 3$ (بالتبسيط)

13) $AP = 7$ (بالتبسيط)

14) $\frac{AP}{AB} = \frac{7}{10.5}$ (خاصية التعويض للمساواة)

15) $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$ (بالتبسيط)

تبرير: صنِّف الجمل الآتية إلى صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$، فإن $a = -b$.

صحيحة دائماً، إذا كان فإن (خاصية الطرح للمساواة) (بالتعويض) ولذا تكون هذه العبارة صحيحة دائماً.



حلول
منصة مدرسية تعليمية

30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$، فإن $a = \sqrt{b}$.

صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان a2 = 1 ، وكان

$a = 1$، فإن $1 = \sqrt{b} = \sqrt{1}$ ، وعندما $a = -1$ ، و $b = 1$ ،

فإن $\sqrt{b} = 1$ لأن الجذر التربيعي غير سالب عندئذ تكون العبارة غير

صحيحة. ولذلك فالعبارة صحيحة أحيانًا.

31) **تحدٍّ:** وضعت آمنة تخمينًا ينصُّ على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

a) أعط أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تُثبت هذه الأمثلة صحة التخمين.

إجابة ممكنة: $3 + 3 = 6$،
$7 + 9 = 16$ ، $5 + 7 = 12$. هذه
أمثلة توضح التخمين، ولكنها لا
تثبته؛ وذلك لأن الأعداد الفردية
المذكورة لا تمثل جميع الأعداد
الفردية، وإنما هي أمثلة فقط.

b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $2n - 1$. أعط أمثلة تؤيد ذلك.

إجابة ممكنة: $3 = 2(2) - 1$،
$5 = 2(3) - 1$ ، $7 = 2(4) - 1$



c) ما العدد الذي تكون الأعداد الزوجية جميعها مضاعفات له؟ فسّر لفظيًا كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a, b، لإثبات صحة تخمين آمنة.

2؛ إجابة ممكنة: سوف أجمع العبارتين $2n-1$ و $2m-1$ اللتين تمثلان أي عددين فرديين، وأثبت أن المجموع من مضاعفات العدد 2.

d) اكتب برهانًا جبريًا لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

افترض أن العددين الصحيحين الفرديين هما: $2n - 1$ و $2m - 1$، فيكون المجموع $(2n - 1) + (2m - 1)$ يساوي $2n + 2m - 2$. نلاحظ أن كل حد يحوي العامل 2؛ لذا يمكن إخراجه عاملًا مشتركًا لينتج $2(n + m - 1)$. وهذه الصيغة هي مضاعف للعدد 2، إذن هي تمثل عددًا زوجيًا؛ لذا فإن مجموع عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.



32) **اكتب:** ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أيُّ البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برر إجابتك.

اجابة ممكنة: البرهان الحر هو نوع من البراهين الذي تكتب فيه الخطوات جملا كاملة على شكل فقرة. وهذا النوع من البراهين يماثل محتواه البرهان ذا العمودين، لكنه يختلف عنه شكلا ففي البرهان ذي العمودين تكتب العبارات في عمود، وتكتب المبررات في عمود آخر بجانب العمود الأول.

